ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М. *Квадратурные формулы.* – М.: Наука, 1988. – 254с.

2. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач* – Казань: Изд-во Канск. ун-та, 1980 – 232 с.

3. Micchelli C. A., Riwlin T.J. *A survey of optimal recovery* // Optim. Estimat. Approximat. Theory. – New York–London, 1977. – P.1-54.

Б. Е. Победря (Москва)

ПОСТУЛАТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ НИХ

Механика сплошной среды (МСС) – наука феноменологическая. Она основана на введении гипотетического континуума (сплошной среды), в которой вводятся постулаты – набор аксиом, из которых выводятся логические следствия. В отличие от классической (теоретической) механики число объектов, участвующих в геометрическом пространстве (чаще всего это евклидово пространство R^3), не конечное и даже не счётное, а «континуальное». Каждый такой объект называется частицей, которая идентифицируется «лагранжевыми» координатами, и занимают положение радиуса-вектора $\vec{r}$ в R^3 в некоторый момент времени t. Скорость такой частицы: $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Каждая частица называется материальной, если ей приписан скаляр ρ, называемый плотностью вещества.

Постулаты МСС справедливы для любого объёма V, содержащегося в R^3, который ограничивается замкнутой поверхностью Σ. Первый постулат называется законом сохранения масс:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = 0. \qquad (1)$$

Второй постулат – это закон изменения количества движения

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\vec{v}dV = \int_V \rho\vec{F}dV + \int_\Sigma \vec{S}^{(n)}d\Sigma . \qquad (2)$$

Здесь $\vec{v}$ – вектор скорости, $\vec{F}$ – плотность массовых сил, $\vec{S}^{(n)}$ – поверхностная нагрузка, действующая на площадке с единичным вектором нормали $\vec{n}$: $\vec{S}^{(n)} = \vec{S}_i n_i$, $\vec{S}_i = \sigma_{ij}\vec{e}_j$, где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений. Для простоты будем рассматривать малые деформации, так что эйлеровы координаты совпадают с лагранжевыми. Постулат об изменении момента количества движения или кинетического момента можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\int_V \bar{r}\times\rho\bar{v}dV = \int_V \bar{r}\times\rho\bar{F}dV + \int_\Sigma \bar{r}\times\bar{S}^{(n)}d\Sigma. \quad (3)$$

Если рассматриваются неизотермические процессы, то следует привлечь законы термодинамики.

Первый закон термодинамики (закон сохранения энергии) может быть сформулирован в виде

$$dE + dK = \delta Q + \delta A^{(e)}, \quad (4)$$

где E - внутренняя энергия среды, которая связана с плотностью внутренней энергии e соотношением $E = \int_V \rho e dV$. Здесь K - кинетическая энергия: $K = \frac{1}{2}\int_V \rho\bar{v}\cdot\bar{v}\,dV$, δQ – изменение внешнего притока тепла: $\delta Q \equiv dt\left[\int_V \rho q dV - \int_\Sigma q^{(n)}d\Sigma\right]$, где q – массовый источник тепла, $q^{(n)}$- приток тепла через поверхность с единичным вектором нормали $\bar{n} = n_i\bar{e}_i$: $q^{(n)} = q_i n_i$, $\delta A^{(e)}$- изменение работы внешних сил $\delta A = dt\left[\int_V \rho\bar{F}\cdot\bar{v}\,dV - \int_\Sigma \bar{S}^{(n)}\cdot\bar{v}\,d\Sigma\right]$. С использованием теоремы живых сил $dK = \delta A^{(e)} + \delta A^{(i)}$, где $\delta A^{(i)}$ – изменение работы внутренних сил $\delta A^{(i)} \equiv dt\int_V \sigma_{ij}v_{ij}dV$, а v_{ij}- компоненты тензора скоростей деформации, равные $v_{ij} = \left(v_{i,j} + v_{j,i}\right)/2$, первый закон термодинамики (4) можно записать в виде

$$dE = \delta Q - \delta A^{(i)}. \quad (5)$$

Внутренняя энергия E и её плотность e являются функциями термодинамических параметров состояния, задание которых и определяет математическую модель среды. Второй закон термодинамики

$$TdS = \delta Q + W^{*}dt \quad (6)$$

гарантирует существование ещё одной функции термодинамических параметров состояния – энтропии S или её плотности s: $S \equiv \int\limits_V \rho s\, dV$.

В формулировку второго закона термодинамики входит так же функция рассеивания (диссипации) W^* или её плотность w^*: $W^* \equiv \int w^* dV$.

При этом для обратимых сред $W^* = 0$, а для необратимых $W^* > 0$. При построении математической модели сплошной среды задают конкретное выражение функции рассеивания.

Первый закон термодинамики (4) или (5) может быть сформулирован в интегральном виде соответственно

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\left(e + \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}\right)dV = \int\limits_V \rho\left(q + \vec{F}\cdot\vec{v}\right)dV + \int\limits_\Sigma \left(\vec{S}^{(n)}\cdot\vec{v} - q^{(n)}\right)d\Sigma, \qquad (7)$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho e dV = \int\limits_V \left(\rho q + \sigma_{ij}v_{ij}\right)dV - \int\limits_\Sigma q^{(n)} d\Sigma. \qquad (8)$$

Точно также на основании (6) может быть дана интегральная формулировка второго закона термодинамики

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho s\, dV = \int\limits_V \frac{\rho q}{T} dV - \int\limits_\Sigma \frac{q^{(n)}}{T} d\Sigma + \int\limits_V \left(\frac{w^*}{T} - \frac{q_i T_{,i}}{T^2}\right)dV. \qquad (9)$$

Можно дать дифференциальные следствия из интегральных формулировок основных постулатов механики сплошной среды. Так из закона сохранения масс (1) следует уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0 \qquad (10)$$

Из закона об изменении количества движения (2) следуют уравнения движения сплошной среды: $\rho\frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \sigma_{ji,j}$. Из закона об изменении кинетического момента (3) следует симметричность тензора напряжений $\underset{\sim}{\sigma}$: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Дифференциальным следствием первого закона термодинамики (интегральной формы (7)) является уравнение $\rho\frac{de}{dt} + \frac{\rho}{2}\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} = \sigma_{ij}\cdot v_{ij} + \rho\vec{F}\cdot\vec{v} + \rho q - q_{i,i}$, а интегральной формы (8) уравнение $\rho\frac{de}{dt} = \sigma_{ij}v_{ij} + \rho q - q_{i,i}$. Дифференциальным следствием второго закона термодинамики (9) является уравнение

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \rho q - q_{i,i} + w^{*} \tag{11}$$

Уравнение (11) называется уравнением притока тепла. Обычно полагают справедливым классический закон теплопроводности Фурье $q_i = -\Lambda_{ij} T_{,j}$, где $\underset{\sim}{\Lambda}$ – тензор теплопроводности. Для изотропной среды $\Lambda_{ij} = \Lambda \delta_{ij}$. Таким образом, для однородной изотропной среды уравнение притока тепла (11) имеет вид $\rho T \dfrac{ds}{dt} = \Lambda \Delta T + \rho q + w^{*}$.

Для многокомпонентной среды некоторые постулаты приходится изменить. В связи с этим изменяются и основные уравнения. Пусть каждая частица сплошной среды содержит m подчастиц (компонентов). Каждый компонент имеет плотность $\rho^{(\alpha)}$, $\alpha = 1,\ldots,m$. Суммарная плотность частицы вещества равна ρ:

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^{m} \rho^{(\alpha)} . \tag{12}$$

Скорость каждого компонента обозначим через $\vec{v}^{(\alpha)}$. Тогда скорость каждой частицы сплошной среды $\vec{v}$ можно представить как центр масс подчастиц:

$$\vec{v} = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\rho^{(\alpha)} \vec{v}^{(\alpha)}}{\rho} . \tag{13}$$

Определим диффузионный поток $\vec{j}^{(\alpha)}$ формулой

$$\vec{j}^{(\alpha)} = \rho^{(\alpha)} \left(\vec{v}^{(\alpha)} - \vec{v} \right) \tag{14}$$

Из (12) - (14) следует, что $\sum\limits_{\alpha=1}^{m} \vec{j}^{(\alpha)} = 0$. Введём величину массовой концентрации компонента α:

$$\vec{j}^{(\alpha)} \equiv \rho^{(\alpha)} / \rho \tag{15}$$

Из (12) и (15) следует, что $\sum\limits_{\alpha=1}^{m} c^{(\alpha)} = 1$.

В многокомпонентной среде могут происходить химические реакции со скоростями J_I, $I = 1,2,\ldots,N$. Пусть $\nu_{\alpha I}$ – коэффициенты, пропорциональные стехиометрическим коэффициентам $\alpha = 1,2,\ldots,m$.

Тогда для каждого компонента будет изменяться и постулат (1), который для каждого компонента может быть записан в виде $\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho^{(\alpha)}dV = \int\limits_V R_\alpha dV$. Соответствующее уравнение неразрывности для компонента α имеет вид

$$\frac{\partial\rho^{(\alpha)}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho^{(\alpha)}\vec{v}^{(\alpha)}\right) = R_\alpha, \tag{16}$$

где $R_\alpha \equiv \sum\limits_{l=1}^{N} \nu_{\alpha l} J_l$. Просуммировав уравнения (16) по всем компонентам, получим на основании (12) и (13) уравнение неразрывности (10) для всей частицы. При этом очевидно $\sum\limits_{\alpha=1}^{m} R_\alpha = 0$. Уравнения (16) можно записать в другом виде: $\rho\frac{dc^{(\alpha)}}{dt} + \operatorname{div}\vec{j}^{(\alpha)} = R_\alpha$. Тогда они называются уравнениями диффузии. Для построения конкретных моделей МСС вводятся определяющие соотношения, как связь между «основными» параметрами (деформации, температура, градиент температуры, концентрации) и их «потоками» (напряжения, энтропия, вектор теплового потока, векторы диффузионных потоков).

Наряду с классическими моделями идеальной и вязкой жидкости, упругого, вязкоупругого и пластического тела, рассматриваются и другие: магнитная жидкость, пьезоупругое тело, композит и т.п. Для введения новых моделей в МСС достаточно воспользоваться основными её постулатами (иногда несколько изменёнными) и теорией определяющих соотношений.

М. В. Селина (Самара)

ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ДАРБУ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ И УСЛОВИЕМ СОПРЯЖЕНИЯ

1. Для уравнения

$$u_{xy} + \frac{\alpha}{y-x}u_y = 0, \tag{1}$$